E-school di Arrigo Amadori

Analisi I

Successioni di funzioni reali

01 – Introduzione.

In questo capitolo applicheremo i concetti di successione e di serie alle funzioni numeriche reali.
Una **successione di funzioni** è una applicazione da N (numeri naturali) a FA (funzioni numeriche reali sul dominio A).

Le successioni di funzioni sono di estrema importanza in quanto permettono, per esempio, di approssimare una funzione qualunque (sviluppi in serie di Taylor, di Fourier).

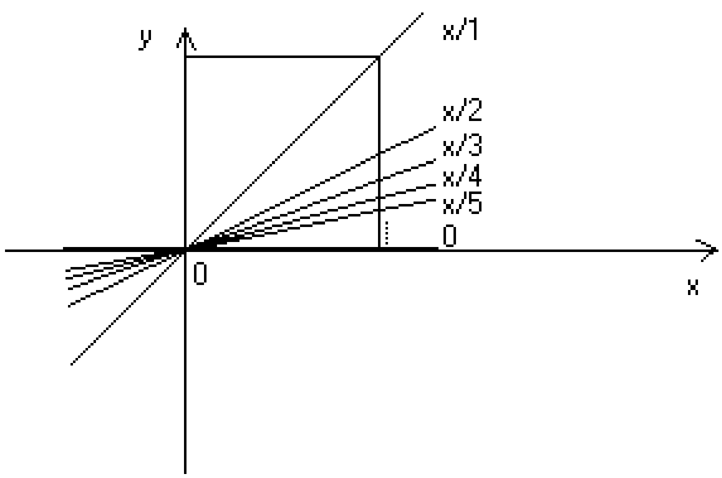
Esempi di successioni di funzioni sono :

$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in R$$

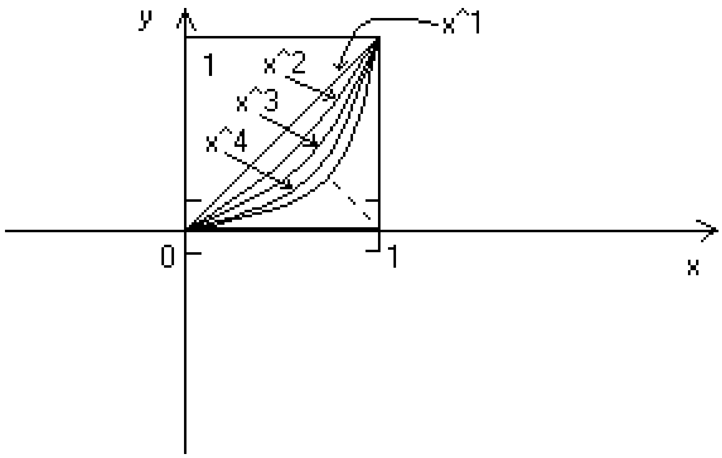
$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1]$$

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \cdot (1 - x), \quad x \in [0,1]$$

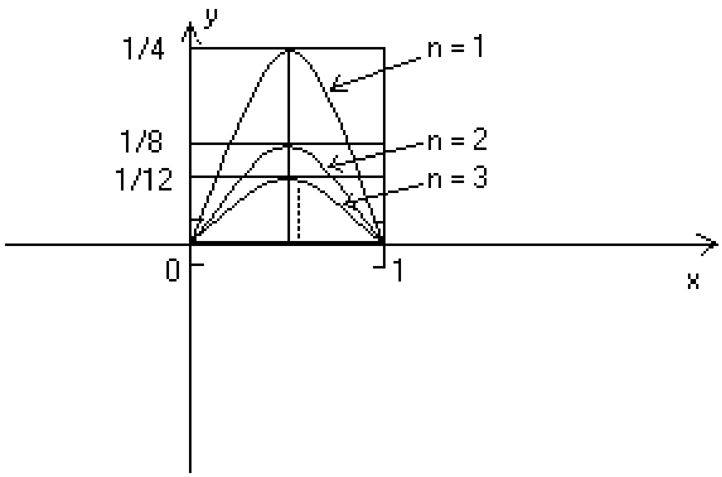
Nel primo esempio le funzioni della successione sono x / 1 , x / 2 , x / 3 , x / 4 ecc. ecc.
Graficamente si ha :



Nel secondo esempio, x ^ 1 , x ^ 2 , x ^ 3 , (dove ^ indica l’elevamento a potenza) ecc. ecc.
Graficamente :



Nel terzo esempio, x * (1 – x) / 1 , x * (1 – x) / 2 , x * (1 – x) / 3 , x * (1 – x) / 4 ecc. ecc.
Graficamente :



Consideriamo ora il problema della convergenza di una successione di funzioni. Si hanno due tipi di convergenza, la semplice e la uniforme.

02 – Successioni di funzioni convergenti semplicemente.

Sia data una successione fn di funzioni numeriche reali definite sul dominio A . Si dice che fn **converge semplicemente** su A ad f per n tendente all'infinito e si scrive :

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f$$

oppure

$$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$$

oppure

$$f_n \to f$$

se :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in A$$

ovvero se :

$$\forall \varepsilon \in R^+ \forall x \in A \exists n(x,\varepsilon) \in N \ni \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon, \forall n \in N, n > n(x,\varepsilon)$$

La convergenza semplice di una successione di funzioni è una applicazione del concetto di convergenza di una successione di numeri reali. Si tratta di verificare che in ogni punto x del dominio A la successione di numeri reali fn(x) converga a f(x).

La successione di funzioni del primo esempio dell'introduzione converge semplicemente su tutto R alla funzione y = 0 . Ciò è ben intuibile osservando il grafico della successione ed è facilmente verificabile applicando la definizione di convergenza semplice.

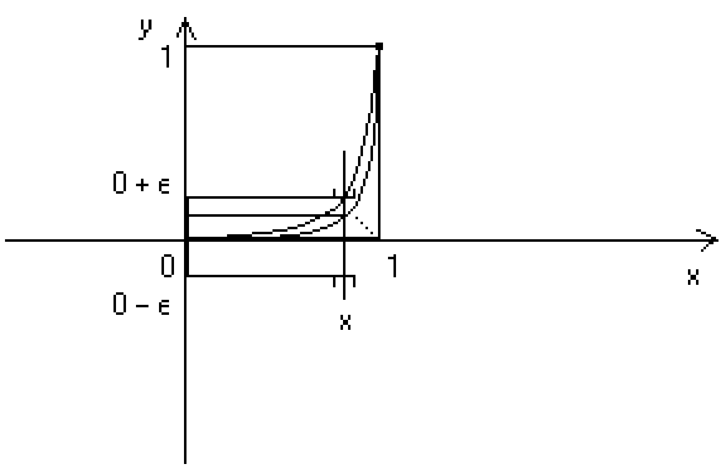
La successione del secondo esempio, invece, è un po' più complicata. Essa converge semplicemente alla funzione discontinua definita come :

y = 0 se x appartiene all'intervallo [0 , 1[

y = 1 per x = 1

Ciò è evidente perché x^n vale 1 se x = 1 per ogni valore di n . Inoltre, al crescere di n , come si vede bene dal grafico, le funzioni della successione si avvicinano sempre più all'asse delle x per poi flettere verso il punto (1 , 1).

Omettiamo la dimostrazione esatta di quanto affermato perché le considerazioni grafiche sono esaurienti. Ci limitiamo al caso con n molto grande :



Dal grafico si vede bene che fissato un x ed un ε positivo si determina un valore di n tale che x^n è compreso nell'intervallo]0 - ε , 0 + ε[per tutti i valori di n maggiori di quel valore di n precedentemente determinato.

Per x = 1 la successione di funzioni fornisce il valore costante 1 , per cui la convergenza in 1 ad 1 è banale.

La successione del terzo esempio converge evidentemente a y = 0.

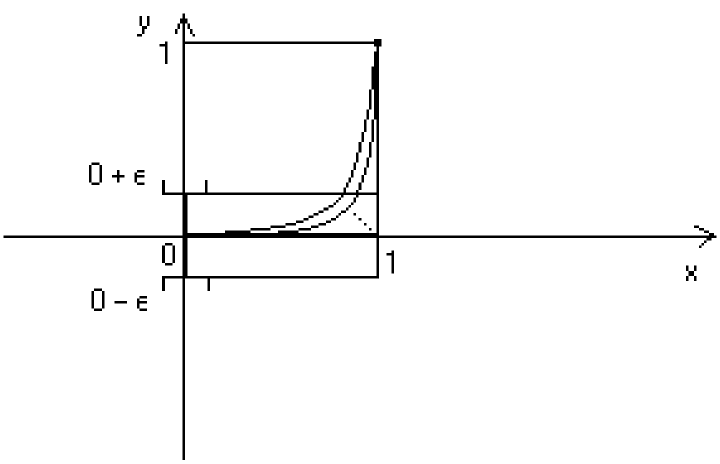
03 – Successioni di funzioni convergenti uniformemente.

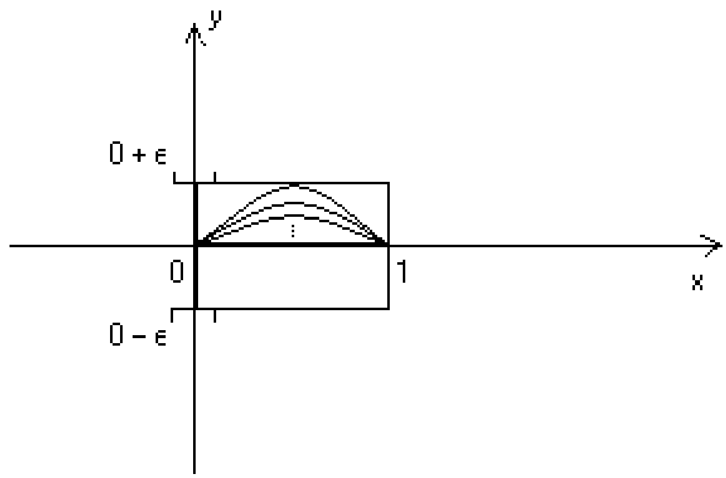
In tutti e tre gli esempi si verifica la convergenza semplice. Ad un più attento esame si osserva che i due primi esempi hanno un “modo” di convergere su A diverso dal terzo esempio.
Nel terzo esempio il valore n in corrispondenza di ε oltre il quale i valori delle funzioni cadono dell’intervallo] f(x) - ε , f(x) + ε [dipende solo da ε e non da x.

Si dice che fn **converge uniformemente** su A ad f per n tendente all’infinito se :

$$\forall \varepsilon \in R^+ \exists n(\varepsilon) \in N \ni \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon, \forall x \in A, \forall n \in N, n > n(\varepsilon)$$

Confrontando le successioni del secondo e del terzo esempio, il concetto di convergenza uniforme appare chiaro :





Nel primo caso la successione non converge uniformemente su [0 , 1] perché, fissato un ε positivo minore di 1 , ogni funzione x^n incontra la retta y = 0 + ε qualunque sia il valore di n per cui esistono sempre valori di x^n al di fuori dell’intervallo]0 - ε , 0 + ε[.

Nel secondo caso, invece, si ha la convergenza uniforme su [0 , 1] in quanto, fissato un ε positivo, si hanno tutti i valori delle funzioni compresi nell’intervallo]0 - ε , 0 + ε[oltre un certo valore di n .

Nel primo caso, se si prendesse una restrizione della successione all’intervallo [0 , a] con a < 1 , allora si avrebbe la convergenza uniforme.

La convergenza uniforme può essere considerata dal punto di vista delle successioni di Cauchy per cui vale il teorema (di cui ometteremo la dimostrazione) :

condizione necessaria e sufficiente perché una successione di funzioni reali su A sia uniformemente convergente è che

$$\forall \varepsilon \in R^+ \exists n(\varepsilon) \in N \ni \left| f_m(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon, \forall m, n \in N, m, n > n(\varepsilon), \forall x \in A$$

Inoltre valgono i seguenti importanti teoremi (omettiamo le dimostrazioni) :

- nelle dovute ovvie condizioni, se una successione di funzioni reali è uniformemente convergente, si ha :

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

- una successione uniformemente convergente di funzioni reali continue ha per limite una funzione continua.

04 – Serie di funzioni reali convergenti semplicemente ed uniformemente.

Sia fn una successione di funzioni numeriche reali di dominio A . La **serie di funzioni** :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$$

è definita come la successione delle somme parziali f1 , f1 + f2 , f1 + f2 + f3 , …

Quanto affermato per le successioni di funzione vale anche per le serie di funzioni.

Una serie di funzioni è **convergente semplicemente** se la successione di somme parziali

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

converge per ogni x appartenente al dominio A . Ciò equivale ad affermare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge per ogni x appartenente ad A .

Una serie di funzioni è **convergente uniformemente** se la successione di somme parziali

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

converge uniformemente su A .

Il valore che assume la serie per un dato x si chiama **somma della serie**. La somma della serie è ovviamente una funzione di x .

Per la convergenza uniforme di una serie vale l'importante teorema (di cui omettiamo la dimostrazione) :

> condizione necessaria e sufficiente perché una serie di funzioni numeriche reali definite sul dominio A sia uniformemente convergente è che

$$\forall \varepsilon \in R^+ \exists n(\varepsilon) \in N \ni \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon, \forall n, p \in N, n > n(\varepsilon), \forall x \in A$$

05 – Serie di funzioni reali totalmente convergenti.

La serie di funzioni reali $\sum f_n$ sul dominio A è **totalmente convergente** se :

$$\sup_A |f_n| < +\infty, \forall n \in N$$

ed è convergente la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_A |f_n|$$

Questo tipo di convergenza è molto importante perché riduce una serie di funzioni ad una serie di numeri (i sup per ogni n delle funzioni sul dominio A).

Per la totale convergenza vale il fondamentale teorema (di cui omettiamo la dimostrazione) :

> se una serie di funzioni numeriche reali sul dominio A è totalmente convergente, allora è anche uniformemente ed assolutamente (vedi il capitolo delle successioni e serie di numeri reali) convergente.

Fine.

Pagina precedente

Home page